コミットメントゲームの均衡と利潤関数の臨界点

村　田　省　三

Abstract

In this paper, we consider the equilibrium of games with observable delay in Hamilton & Slutsky (1990). The condition for the equilibria in theorem 5 is still insufficient for determininng the order of commitment games. In this paper, we give one solution to this insufficiency problem. The essential point of this problem is that the critical point of the profit function is not in the strategic field of the game as Amir model.

Keywords: commitment game, Pareto dominance, Isoquant

1　はじめに

手番コミットメントにもとづく，プレイヤーＡおよびＢによる，複占ゲームは，先手または後手についてのコミットメント確定後に戦略変数を決定するという事実上の２段階ゲームになる。このゲームの均衡利得は，純戦略均衡であれば，手番確定の基本ゲサブゲームにおける４つの均衡利得の何れかである。プレイヤーＡおよびＢの手番が，（先手，先手），（先手，後手），（後手，先手）および（後手，後手）でおこなわれるサブゲームの均衡利得のひとつが，他のサブゲームの均衡利得に対してパレート優位であれば，それが手番コミットメントゲームの純戦略均衡利得になる。

ただし，（後手，後手）が選択されたときの基本ゲーム（サブゲーム）均

衡戦略は，手番コミットメントゲームの均衡にならない[*1]。同時手番ナッシュ均衡利得とシュタッケルベルグ均衡利得が異なっているときには，シュタッケルベルグ均衡における先手プレイヤー利得は，同時手番ナッシュ均衡利得を上回り，後手から先手への逸脱が常に有利になるから，（後手，後手）は均衡にならない。

HS (1990) 定理２が示していることは，（先手，先手）による部分ゲーム（同時手番）均衡利得が，（先手，後手）および（後手，先手）均衡利得にたいしてパレート優位なら，手番コミットメントゲームの均衡手番は同時手番（先手，先手）になるということである。それが唯一の純戦略均衡手番であり，真正な混合戦略均衡はない。このとき，どちらのプレイヤーにとっても，先手戦略が支配戦略で，手番順序の形成（同時手番）は確定的である。

HS (1990) 定理３が示していることは，（先手，後手）および（後手，先手）のもたらすシュタッケルベルグ部分ゲーム均衡利得が，（先手，先手）による部分ゲーム（同時手番）均衡利得にたいしてパレート優位なら，手番コミットメントゲームの均衡は，（先手，後手）または（後手，先手）になるということである。これらの混合も均衡戦略になる。すなわち，先手と後手を確率的に選択する戦略もまたゲーム均衡になる。このケースでは，基本ゲームにおける３種類のサブゲームの均衡利得のどれも，他の２つの均衡利得に対してパレート優位にはならず，したがって支配戦略は存在しない。

これら２つの定理が想定する状況下では，手番の確定するゲーム均衡は得られない。それにたいして，HS (1990) 定理４が示すのは，ゲーム均衡における手番が先手と後手に確定するケースである。あるシュタッケルベルグ

*1 HS (1990) では，サブゲームの同時手番均衡と２つのシュタッケルベルグ均衡はユニークに存在し，相互に異なるという仮定に加えて，各プレイヤーの最適反応曲線連続性が仮定されており，また，自己の戦略変数について利潤関数が狭義準凹であることが仮定されている。ただし，定理２，３および４の証明にとっては，狭義準凹性の仮定は必要ではない。この仮定は定理５の証明に必要になるが，それがどのように証明中に利用されているかの詳細は明示されておらず，これまで，論争を生む原因となってきた。

均衡利得が，同時手番ナッシュ均衡利得にたいしてパレート優位であり，もうひとつのシュタッケルベルグ均衡利得についてはパレート優位でないとき，その（パレート優位な）シュタッケルベルグ均衡点をもたらす手番順序に，ゲーム手番が確定する。

定理５は，各プレイヤーの等利潤線と最適反応曲線の傾きの組合わせを検討すれば，定理２，３または４のいずれかに帰着することを示すものである。等利潤線の凸性と，最適反応曲線上での利得単調増（または単調減）を仮定すれば，定理５の内容は平易になるものの，HS (1990) 定理５においては凸性と単調性は仮定されない[*2]。したがって，すでに，定理５が矛盾を含む可能性はあった。Amir (1995) は，その指摘の代表例である。同心円上の等利潤線をもち，円の中心に向かって利潤が増大するような特殊な利潤関数を仮定して，定理５の反例を示したのである。また，村田（2008）は，外部効果からの影響をともなう利潤関数を仮定して，同時手番ナッシュ均衡点を原点とする４象限区分によってパレート優位集合の分布領域を決定できないケースを示した。

定理５に対する以上の反例は，いずれも，HS (1990) の仮定だけでは，定理５が無矛盾でないことを示すものである。本稿は，この問題を整理することがひとつの目的である。すなわち，同時手番ナッシュ均衡を原点とする４象限区分によってパレート優位集合の分布象限を確定できない原因を整理する。

*2 これらは直接的には仮定されていないが，HS (1990) の図解をみるかぎり，暗黙裡に想定されているものと推測される。しかし，ゲームモデルでの仮定と，定理中での仮定には，これら仮定に関する記述がないから，HS (1990) で得られている各定理が，きわめて緩い条件下で，証明できるかのような誤解を与えている原因になっている。

2　コミットメントゲーム

2.1　基本複占モデル

基本複占ゲームにおける，プレイヤー A，B の利潤関数，$\pi_A(P_A, P_B)$，$\pi_B(P_A, P_B)$ の (P_A, P_B) は，コンパクト凸集合 $(X(\subset R_+^2)$ 上で定義され，連続微分可能とする。P_A^C, P_B^C は各プレイヤーの戦略コミットメント値，P_A^S，P_B^S を同時手番均衡（第１期）に対応する戦略コミットメント値，P_A^L, P_B^L は，各々，$\pi_A(P_A, R_B(P_A))$，$\pi_B(R_A(P_B), P_B)$ を最大にする戦略コミットメント値，対応の後手戦略値を P_A^F, P_B^F とする。$R_A(*), R_B(*)$ は各プレイヤーの最適反応関数，$q_A, q_B(\in(0, 1))$ はコミットメント確率である。なお，(P_A, P_B) の定義域 $X(\subset R_+^2)$ において，以下の成立を仮定する[*3]。

(*a*)　$\pi_A(x, y)$ は，x について狭義準凹であり，$\pi_B(x, y)$ は y について狭義準凹である。

(*b*)　最適反応曲線（$\frac{\partial\pi_A}{\partial P_A}=0$，$\frac{\partial\pi_B}{\partial P_B}=0$) は共に連続である。

(*c*)　基本ゲームの同時手番均衡（第１期）と２つのシュタッケルベルグ均衡は純戦略で R_+^2 に一意に存在し，かつ相互に異なる。

手番コミットメントゲーム

仮定(a)～(c)を満たす基本複占ゲームにおける戦略を決定する前段階で，各プレイヤーは手番順序（先手か後手）を同時に選択する。先手プレイヤーにたいして，後手プレイヤーは，先手戦略観察後に基本複占ゲームにおける戦略を決めることができる。実質的に２期間ゲーム，均衡概念はサブゲーム完全均衡である[*4]。

---

*3 これらは，HS (1990) での仮定とまったく同一である。

*4 手番コミットメントゲーム（Extended Game with Observable Delay）の場合には，Dowrick (1986) がいうようなシュタッケルベルグウェルフェアの問題は起こらない。

3　Amir (1995) の反例

ここでは，Amir (1995) で指摘されたゲームモデルのもつ構造を再検討する。それは HS (1990) 定理５に対する反例である。Amir (1995) では，いくつかのパラメータを含むモデルとなっているが，より直截的な例示とするため，ここでは以下の具体的な数値例モデルを利用する。利潤関数(1)，(2)が，仮定(a)，(b)および(c)を満たしていることは明らかである。しかし，HS (1990) 定理５にたいする反例となるモデルであるから，利潤関数(1)および(2)の少なくとも一方は，やや変則的な構造を持っている。それは，プレイヤー B の利潤関数(2)である。

$$\pi_A = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}xy - y \tag{1}$$

$$\pi_B = -\frac{1}{2}y^2 + xy - y - x^2 \tag{2}$$

利潤関数(1)における等利潤線（$\pi_A(x, y) = -8$）は，

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial x} = -x + \frac{1}{4}y$$

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial y} = \frac{1}{4}y - 1$$

から，プレイヤー A の最適反応曲線（$y = 4x$）上で交差する２本の直線（$y = 2x + 8$ および $x = 4$）であり，その２本の直線等利潤線（$\pi_A(x, y) = -8$）にはさまれる三角形領域内には，点 (4，16) に向かって凸形状をもつ等利潤線が分布していることが確認できる。点 (4，16) は，特異点であり，$\frac{\partial \pi_A}{\partial x} = 0$，$\frac{\partial \pi_A}{\partial y} = 0$ を満たす点である。これらの等利潤線に対応する利潤は，最適反応曲線を含む三角形領域内では－8 より大きく，そうでない三角形領域内では－8 より小さくなっていて，いずれの等利潤線も，これら２直線に漸近する形状になっている。利潤関数のこの特徴に特筆すべき内容はない。

これにたいして，利潤関数(2)における最適反応曲線（$y=x-1$）は，２本の直線等利潤線に挟まれてはいない。これは，

$$\pi_B=-(x-\frac{1}{2}y)^2-\frac{1}{4}(y+2)^2+1$$

という変形から確認できるが，プレイヤーＢの利潤関数のグラフは，点（−1,−2）を頂点（単峰）をもち，等利潤線は楕円になっている。プレイヤーＢの利潤関数は，点（−1,−2）で最大値(1)をとる。

各部分ゲームの均衡戦略は，具体的に確定する。それをまとめたのが以下である。

A＼B	F	S
F	(25/18，7/9)	(41/16，-1/8)
S	(42/25，4/5)	(25/18，　7/9)

図表１　Amir (1995)の基本複占ゲーム

$$E_c(-\frac{1}{3},\ -\frac{4}{3})$$

$$E_{SA}(-\frac{5}{2},\ -\frac{7}{2})$$

$$E_{SB}(-\frac{2}{5},\ -\frac{8}{5})$$

図表１は，プレイヤーＡおよびプレイヤーＢが，先手(F)ないし後手(S)をとったときの同時手番ナッシュ均衡利得および２種類のシュタッケルベルグ均衡利得を算出したものである。図表１において，Ｆは先手であり，Ｓは後手を意味する。図表２は，近似値を含むが，見やすくしたものである。

A＼B	F	S
F	(1.38，0.77)	(2.56，-0.125)
S	(1.68，0.80)	(1.38，　0.77)

図表２　Amir (1995)基本複占ゲーム(2)

明らかに，プレイヤーＢは，利潤関数のグラフの頂点（－1,－2）に移動しようとする誘因をもち，その結果，プレイヤーＢは支配戦略（先手）をもつ。そのようなプレイヤーＢの部分ゲーム均衡利得の特質を知るプレイヤーＡは，いうまでもなく後手を選択するから，Amir (1995）で提示されたコミットメントゲームの均衡戦略と均衡利得は,

均衡戦略：　A（後手，部分ゲームの戦略値（－2/5)）
　　　　　　B（先手，部分ゲームの戦略値（－8/5)）

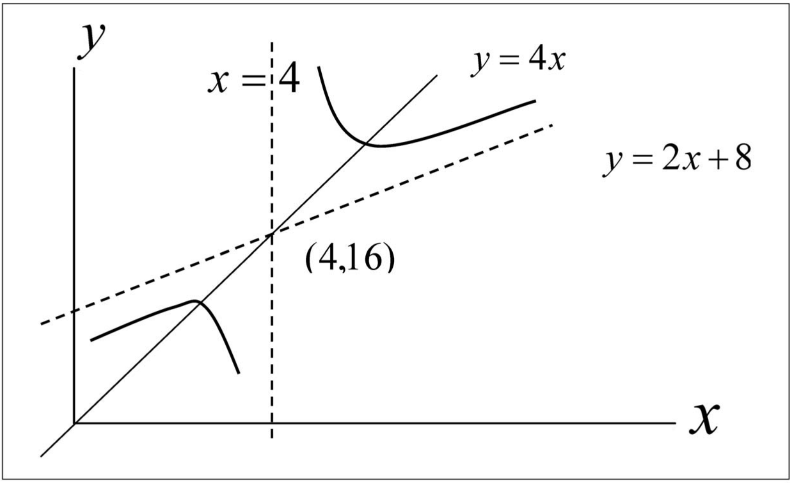
均衡利得：　$\pi_A(S, -\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}) = \frac{42}{25}$

$\pi_B(F, -\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}) = \frac{4}{5}$

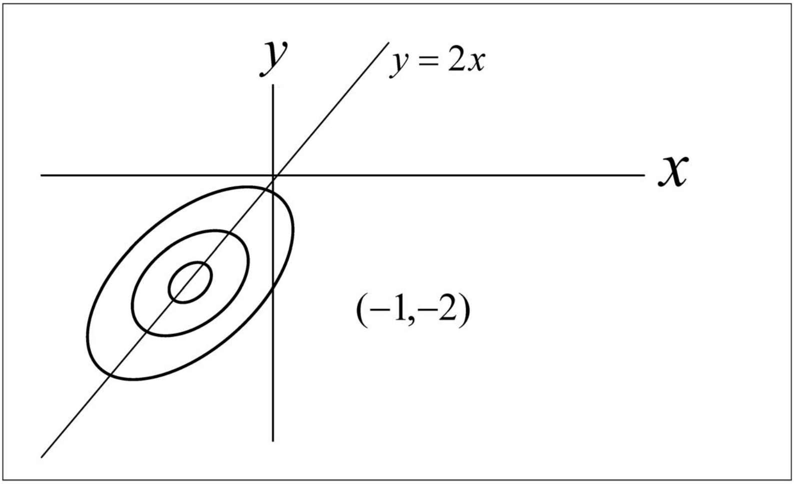
基本ゲームにおける各プレイヤーの最適反応曲線は共に右上がりであり，同時手番ナッシュ均衡点よりパレート優位となる領域を，これら２本の最適反応曲線が通過する。このような場合，定理５によれば，そこに支配戦略はなく，２つのシュタッケルベルグ均衡はともに（純戦略）均衡であり，さらに混合戦略均衡もあるはずである。ところが，本節でのコミットメントゲームには唯一のゲーム均衡しかなく，明らかに定理５に矛盾するというのがAmir (1995）の批判である。

定理５に矛盾するのは，それだけではない。同時手番ナッシュ均衡点を原点とする直交座標系によって区分される４象限について検討した場合，プレイヤーＡにとって（同時手番ナッシュ均衡利得$(\frac{25}{18})$より）大きな利得をもたらす領域が第３象限に完全に含まれることを確認できる。このことは定理５の証明内容と矛盾しないが，プレイヤーＢにとって（同時手番ナッシュ均衡利得$(\frac{7}{9})$よりも）大きな利得をもたらす領域は，そのようにひとつの象限のみに完全に含まれてはいない。これがもうひとつの矛盾である。

次の図表３は，プレイヤーＡの等利潤線の配置を示すものであり，図表４はプレイヤー２の等利潤線の配置である。



図表３：プレイヤー１の等利潤線



図表４：プレイヤー２の等利潤線

ここで，Amir モデルにおける利潤関数の最大点（頂点）座標の特質を指摘しておかねばならない。この点は，いうまでもなく，以下の連立方程式の

解になっている。それは，プレイヤーBの利潤関数の特異点であり，したがって，等利潤線の凹凸逆転の基点になっている。

$$\frac{\partial \pi_B(x, y)}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial \pi_B(x, y)}{\partial x}=0$$

4　HS (1990) 仮定の有効性

ここでは，HS (1990) において置かれている3つの仮定によって，手番コミットメントゲームの均衡における手番形成問題がどこまで確定できるか，または不確定となるかという問題を考察する。最適反応曲線（連続）の存在は，どちらのプレイヤーについても仮定されており，それらの交点が形成する同時手番ナッシュ均衡点の存在も仮定されているから，自己の最適反応曲線上では（相手戦略変数を所与とするときの）自己の戦略変数についての最大点になっている。したがって，同時手番ナッシュ均衡点を通過する等利潤線は，そこにおける相手戦略変数を所与とする水平線（あるいは垂直線）と他の交点を持つことができない。また，最適反応曲線によって2分される2領域の各片側領域内に複数の等利潤点は存在しないことも自明である。このとき，問題となるのは，同時手番ナッシュ均衡点を通る（相手戦略変数を所与とする）水平線（あるいは垂直線）によって2分される領域の片側領域のみを（同時手番ナッシュ均衡点と同等利潤をもたらす）等利潤線が通過するかどうかである。言い換えれば，同時手番ナッシュ均衡点を原点とする直交座標系によって形成される4象限のうち隣り合う象限（たとえば第1象限と第2象限）のみを等利潤線が通過するかどうかである。仮に，そうではないとすると，同時手番ナッシュ均衡点を通る等利潤線は，隣り合わない象限（例えば第1象限と第3象限）を通過していくことになるが，このとき，利潤関数の連続性から，この等利潤線以外の等利潤点が出現する。すなわち，

利潤関数は，自己の戦略変数について２価となる。

そこで，同時手番ナッシュ均衡点を通過する等利潤線は，仮に利潤関数が（ゲームの定義域において），

$$\pi(x, y) = \pi(x, y') = a \qquad for\ y \neq y' \tag{3}$$

となることを許さなければ（以後，このことを，自己の戦略変数について１価である，という），同時手番ナッシュ均衡点を原点として形成される直交座標系の４つの象限のうち，隣り合う象限（たとえば第１象限と第２象限，あるいは第３象限と第４象限など）を通過するのでなけれ矛盾する。

なお，利潤関数が自己の戦略変数について１価であるとすると，同時手番ナッシュ均衡点を通る等利潤線は，同時手番ナッシュ均衡利得より大きな利得をもたらす領域（同時手番ナッシュ均衡点を通る等利潤線によって最適最適反応曲線が挟まれている領域）と，より小さな利得をもたらす領域（同時手番ナッシュ均衡点を通る等利潤線によって最適最適反応曲線が挟まれていない領域）に２分することになる。同時手番ナッシュ均衡点を通過する等利潤線が同点に向かって凸形状であるかどうかまでは確定できないが，Amir (1995) がいうような，同心円状（あるいは楕円）の等利潤線を排除できる。

もちろん，１価の仮定を追加したとしても，同時手番ナッシュ均衡点を通過する等利潤線が，同点に向かって双曲線形状であることまでは証明できないけれども，自己の戦略変数について狭義準凹という仮定があるから，等利潤線の形状は同点に向かってほぼ凸形状になることは明らかである。そして，この特質が満たされるならば，HS (1990) 定理５の証明に矛盾は起こらない。

なお，利潤関数が（ゲームの定義域において）自己の戦略変数について２価以上にならないということは，ゲームの定義域内に利潤関数の特異点を含まないということである。HS (1990) において置かれている仮定では，特異点を排除することができない。そのことが，Amir (1995) の反例を誘発

したのである。利潤関数が条件(3)を満たしてしまうと，実は，(3)を満たす点 (x, y) と点 (x, y') を結ぶ直線上に $\frac{\partial \pi}{\partial y}=0$ 曲線との交点が発生している。このことは，同時手番ナッシュ均衡点を通過する最適反応曲線（$\frac{\partial \pi}{\partial x}=0$）との交点が，同時手番ナッシュ均衡点と同等利潤をもたらす等利潤線の内側に存在するということであって，そのことから，結局，同時手番ナッシュ均衡点が特異点であるという結論が導かれる。

4.1　手番コミットメントゲームの均衡（再考）

手番コミットメントゲーム（The Extended Game with Observable Delay）の基本ゲームにおける各プレイヤーの最適反応曲線とパレート優位集合との位置関係によって，手番コミットメントゲームの均衡における手番順序をを示したのが次の定理１（HS (1990) 定理５）である。結論的には，定理５の証明は誤りであるが，本稿のこれまでの考察にもとづいて，定理の証明を修正することとしたい。

定理１　手番コミットメントゲーム（The Extended Game with Observable Delay）において，条件(C)が満たされれば，HS (1990) 定理５は無矛盾であり，以下の(A)および(B)が証明できる。

条件(C)ゲームの定義域において，各プレイヤーの利潤関数は，自己の戦略値について１価。

(A)　最適反応曲線（連続）の傾きの符号が同一であれば，

(1)　どちらの最適反応曲線も（同時手番均衡にたいする）パレート優位集合に入るときには，混合戦略均衡をふくむ多数のゲーム均衡がある[*5]。

(2)　どちらの最適反応曲線も（同時手番均衡にたいする）パレート優位

---

*5　これは，Pastine and Pastine (2004) で提示された証明法と密接に関連する内容であり，戦略コミットメントゲームに混合戦略均衡が存在しないことを意味する。

集合との交点をもたないときには同時手番均衡のみゲーム均衡になる。

(B) 最適反応曲線（連続）の傾きの符号が逆であれば，

一方の最適反応曲線のみが（同時手番均衡にたいする）パレート優位集合を通過するときには，その通過するプレイヤーが後手となるシュタッケルベルグ均衡のみとなる。

証明. 条件(C)が満たされれば，同時手番ナッシュ均衡利得に対応する等利潤線は，定義域内にただ１本存在する。このとき，パレート優位領域は（同時手番ナッシュ均衡点を原点とする直交座標系により区分される）４象限のうちのどれかひとつの象限のみに完全に含まれている。そして，最適反応曲線（連続）の傾きの符号が同一であれば，２つのシュタッケルベルグ均衡点がこのなかに共に含まれる場合，どちらのプレイヤーも支配戦略を持ち得ない。■

ゲームの定義域の内点には各プレイヤーの利潤関数の特異点を含まない，という条件は，以上の定理の条件と密接に関連している。利潤関数が解析関数であるという一般的な条件のもとで，特異点の近傍では，適当な座標系をとれば楕円か双曲線などのどれかになることが微分幾何学の研究により明らかとなっている。このことは，特異点の近傍は，適当な変換によって，２次式で表現されるという意味であるから，仮にゲームの定義域が利潤関数の特異点を含むならば，等利潤線は２価となると考えられるためである。また，２次化することから，利潤関数の特異点の近傍では，等利潤線の凹凸が逆転することはきわめて当然であり，したがって，円形の等利潤線も出現しうる。また，パレート優位領域は４象限のうちのどれかひとつに完全に含まれるという保障はない。そうであれば，最適反応曲線（連続）の傾きの符号が同一であって，２つのシュタッケルベルグ均衡点がこのなかに共に含まれるとしても，どちらのプレイヤーも支配戦略を持ち得ないかどうか判定不能なこと

もありうる。

なお，等利潤線が，ことごとく，利潤関数の特異点に向かって凸であるときには，利潤関数は２次関数であることが，村田（2009）により証明されている。具体的には双曲線形状の等利潤線になり，Amir (1995) モデルを許容することはない。しかし，それでもなお，利潤関数の特異点を排除する論理を持ち合わせてはいない。

5　おわりに

The Extended Game with Observable Delay の場合，パレート優位集合のなかに含まれるシュタッケルベルグ点のみがゲーム均衡点になる。通常の価格戦略ゲームでは，２つのシュタッケルベルグ点は，どちらも均衡点になり，通常の数量戦略ゲームでは，２つのシュタッケルベルグ点は，どちらも均衡点にならない。ただし，このように（経済学的に）結論することは，ゲーム理論的には，正しくない。

事実，Amir (1995) が示した反例では，同心円型の等利潤線が，頂点 (−1,−2) を頂点（最大利潤点）として想定されているのだが，実はこの頂点 (−1,−2) は，プレイヤー B の利潤関数の特異点になっている。このことは，見逃されやすいが重要である。HS (1990) 定理５の証明が妥当するような通常の基本ゲームでは，利潤関数の特異点がもたらす利潤と同等以上の利得を生じるような領域のみを（暗黙のうちに）ゲーム定義域としている。そのようなゲームモデルにあっては，利潤関数の特異点は（意図されたわけではないにしても結果的に）原点 (0，0) になり，その結果，ゲーム定義域は，経済学的な要請とされる第１象限（各プレイヤーの戦略値が非負となる領域）と偶然に一致するため，特異点は実質的に分析の射程外となり，本稿でいうような問題を発生させないだけである。なお，通常の基本ゲームでは，特異点に向かってことごとく凸形状になる双曲線型の等利潤線が想定されてい

る。このような想定は，いわば結果的な想定であって，ゲームモデル設定者に，そのような想定をしたという意識はないと思われる。

参 考 文 献

[1] Amir,.R.(1995). " Endogenous Timing Two-Player Games: A Counter Example " *Games and Economic Behavior*. **9**. 234-237.

[2] Dowrick,S.(1986). " von Stackelberg and Cournot Duopoly: Choosing Roles, " *Rand Journal of Economics*.**17**. 251-260.

[3] Gal-Or,E.(1985). " First Mover and Second Mover Advantages, " *International Economic Review*.**26**. 649-652.

[4] Hamilton,J.,andS,Slutsky.(1990). " Endogenious Timing in Duopoly Games: Stackelberg or Cournot Equilibria, " *Games and Economic Behavior*.**2**.29-46.

[5] 村田省三(2008).「外部経済と複占ゲームの均衡」『応用経済学研究』，第２巻.30-43.

[6] 村田省三(2010).「等利潤線と多項式」『経営と経済』，第90巻第３号.33-42.

[7] Pastine,I., and E,Pastine.(2004). " Cost of Delay and Endogeneous Price Leadership, " *International Journal of Industorial Organization*.**22**.135-145.